

Megint a látókör témájához

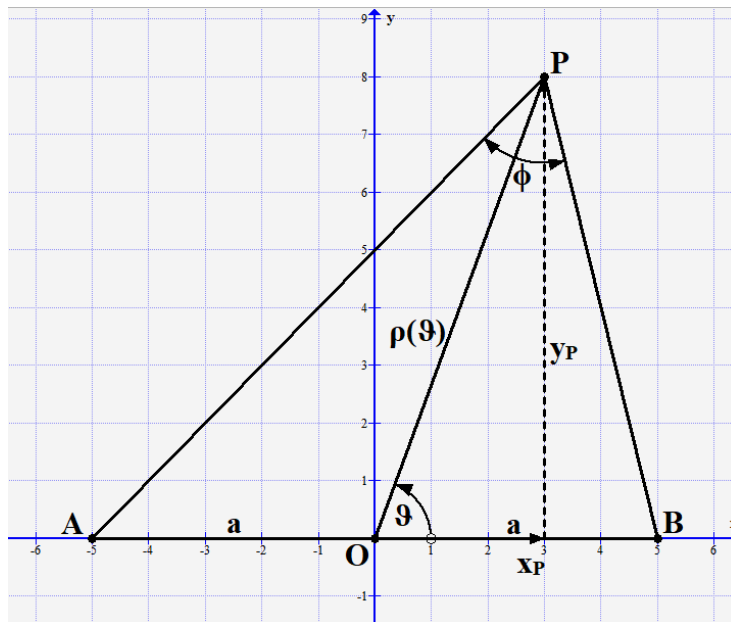
Azért megint, mert *) korábbi dolgozatunk is e témával foglalkozott.

A feladat

Írjuk fel azon síkbeli pontok mértani helyének polárkoordinátás egyenletét, melyből egy $2 \cdot a$ hosszúságú szakasz ϕ szög alatt látszik!

A megoldás

Ehhez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Ez alapján koszinusztétellel írhatjuk, hogy:

$$(2 \cdot a)^2 = (\overline{AP})^2 + (\overline{BP})^2 - 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{BP} \cdot \cos \phi ; \quad (1)$$

most – a „P” indexet már elhagyva – :

$$(\overline{AP})^2 = (a + x)^2 + y^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot x + (x^2 + y^2) = a^2 + 2 \cdot a \cdot x + \rho^2 ; \quad (2)$$

majd:

$$(\overline{BP})^2 = (a - x)^2 + y^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot x + (x^2 + y^2) = a^2 - 2 \cdot a \cdot x + \rho^2 ; \quad (3)$$

ezekkel:

$$(\overline{AP})^2 + (\overline{BP})^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot x + \rho^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot x + \rho^2 = 2 \cdot (a^2 + \rho^2); \quad (4)$$

ezután (1) és (4) - gyel:

$$(2 \cdot a)^2 = 2 \cdot (a^2 + \rho^2) - 2 \cdot \sqrt{a^2 + 2 \cdot a \cdot x + \rho^2} \cdot \sqrt{a^2 - 2 \cdot a \cdot x + \rho^2} \cdot \cos \phi ,$$

$$2 \cdot a^2 = a^2 + \rho^2 - \sqrt{a^2 + 2 \cdot a \cdot x + \rho^2} \cdot \sqrt{a^2 - 2 \cdot a \cdot x + \rho^2} \cdot \cos \phi ,$$

$$\sqrt{a^2 + 2 \cdot a \cdot x + \rho^2} \cdot \sqrt{a^2 - 2 \cdot a \cdot x + \rho^2} \cdot \cos \phi = \rho^2 - a^2 ,$$

$$\sqrt{a^2 + 2 \cdot a \cdot x + \rho^2} \cdot \sqrt{a^2 - 2 \cdot a \cdot x + \rho^2} = \frac{\rho^2 - a^2}{\cos \phi} ,$$

$$[(a^2 + \rho^2) + 2 \cdot a \cdot x] \cdot [(a^2 + \rho^2) - 2 \cdot a \cdot x] = \left(\frac{\rho^2 - a^2}{\cos \phi} \right)^2 ,$$

$$(a^2 + \rho^2)^2 - (2 \cdot a \cdot x)^2 = \frac{(\rho^2 - a^2)^2}{(\cos \phi)^2} ,$$

$$(a^2 + \rho^2)^2 - \frac{(\rho^2 - a^2)^2}{(\cos \phi)^2} = (2 \cdot a \cdot x)^2 ,$$

$$a^4 + 2 \cdot a^2 \cdot \rho^2 + \rho^4 - \frac{\rho^4 - 2 \cdot a^2 \cdot \rho^2 + a^4}{\cos^2 \phi} = 4 \cdot a^2 \cdot x^2 ,$$

$$\rho^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \phi} \right) + 2 \cdot a^2 \cdot \rho^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \phi} \right) + a^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \phi} \right) = 4 \cdot a^2 \cdot x^2 . \quad (5)$$

Figyelembe véve, hogy:

$$x = \rho \cdot \cos \vartheta , \quad (6)$$

(5) és (6) - tal kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \rho^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \phi} \right) + 2 \cdot a^2 \cdot \rho^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \phi} \right) + a^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \phi} \right) &= 4 \cdot a^2 \cdot \rho^2 \cdot \cos^2 \vartheta \rightarrow \\ \rho^4 \cdot (-\operatorname{tg}^2 \phi) + 2 \cdot a^2 \cdot \rho^2 \cdot (2 + \operatorname{tg}^2 \phi - 2 \cdot \cos^2 \vartheta) + a^4 \cdot (-\operatorname{tg}^2 \phi) &= 0 \rightarrow \\ \frac{\rho^4}{a^4} + \frac{2 \cdot a^2 \cdot \rho^2 \cdot (2 + \operatorname{tg}^2 \phi - 2 \cdot \cos^2 \vartheta)}{a^4 \cdot (-\operatorname{tg}^2 \phi)} + 1 &= 0 \rightarrow \frac{\rho^4}{a^4} - 2 \cdot \frac{\rho^2}{a^2} \cdot \frac{2 \cdot (1 - \cos^2 \vartheta) + \operatorname{tg}^2 \phi}{\operatorname{tg}^2 \phi} + 1 = 0 \rightarrow \\ \frac{\rho^4}{a^4} - 2 \cdot \frac{\rho^2}{a^2} \cdot \frac{2 \cdot \sin^2 \vartheta + \operatorname{tg}^2 \phi}{\operatorname{tg}^2 \phi} + 1 &= 0 \rightarrow \frac{\rho^4}{a^4} - 2 \cdot \frac{\rho^2}{a^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \sin^2 \vartheta}{\operatorname{tg}^2 \phi} + 1 \right) + 1 = 0 . \quad (7) \end{aligned}$$

Rövidítő jelöléssel:

$$u = \frac{\rho^2}{a^2} , \quad (8)$$

így (7) és (8) - cal:

$$u^2 - 2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\operatorname{tg}^2 \phi} \right) \cdot u + 1 = 0 . \quad (9)$$

A (9) másodfokú egyenletet a megoldóképlettel megoldva:

$$u_{1,2} = \frac{2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\operatorname{tg}^2 \phi}\right) \pm \sqrt{\left[2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\operatorname{tg}^2 \phi}\right)\right]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = 1 + 2 \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\operatorname{tg}^2 \phi} \pm \sqrt{\left(1 + 2 \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\operatorname{tg}^2 \phi}\right)^2 - 1} ,$$

$$u_{1,2} = 1 + 2 \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\operatorname{tg}^2 \phi} \pm \sqrt{\left(1 + 2 \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\operatorname{tg}^2 \phi}\right)^2 - 1} . \quad (10)$$

Most (8) és (10) - zel:

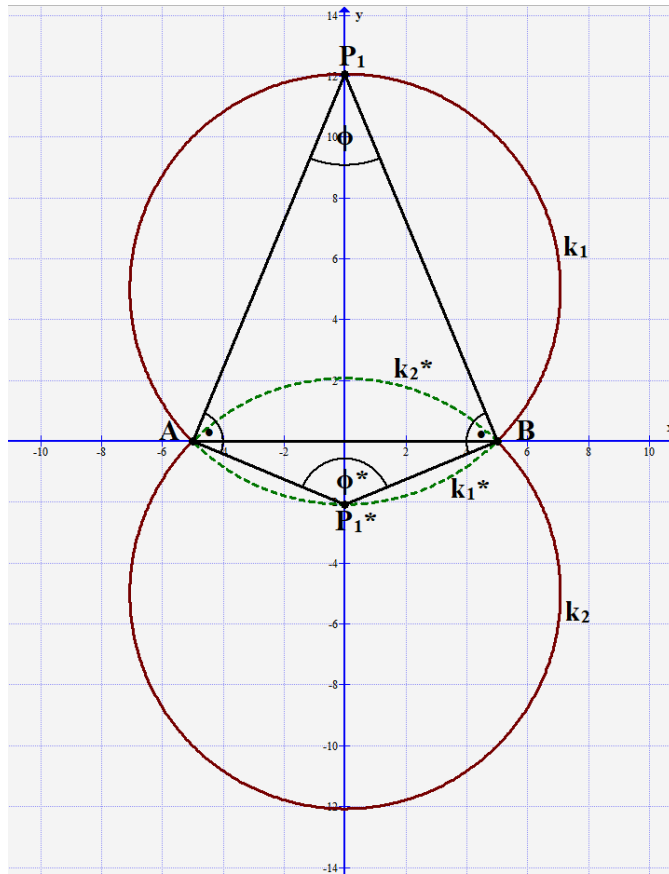
$$\frac{\rho^2}{a^2} = 1 + 2 \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\operatorname{tg}^2 \phi} \pm \sqrt{\left(1 + 2 \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\operatorname{tg}^2 \phi}\right)^2 - 1} \rightarrow \rho > 0 \rightarrow$$

$$\rho(\vartheta) = a \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\operatorname{tg}^2 \phi} \pm \sqrt{\left(1 + 2 \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\operatorname{tg}^2 \phi}\right)^2 - 1}} . \quad (11)$$

Adatok az ábrázoláshoz:

$$a = 5 \text{ (cm) } , \quad \phi = 45^\circ . \quad (A)$$

A (11) és (A) szerinti függvény(ek) grafikonját a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Itt a k_1 és a k_2 jelű körívek a (11) - beli „ + ” - hoz, a k_1^* és a k_2^* körívek pedig a (11) - beli „ - ” jelhez tartoznak.

A 2. ábra szerint:

$$\frac{\phi}{2} + 90^\circ + \frac{\phi^*}{2} = 180^\circ \rightarrow \frac{\phi}{2} + \frac{\phi^*}{2} = 90^\circ \rightarrow \phi + \phi^* = 180^\circ \rightarrow \underline{\phi^* = 180^\circ - \phi} . \quad (12)$$

Eszerint a $*$ - os körívek pontjaiból a 2^*a szakasz a (12) szerinti szög alatt látszik.

Megjegyzések:

M1. A korábbiakhoz képest lényeges eltérés, hogy itt másként rendeztünk be a számításokat.

M2. A látókörökkel kapcsolatos ismeretek a Matematika / Geometria tantárgy anyaga. Itt a szóban forgó körívek polárkoordinátás egyenleteit állítottuk elő. Ez nálunk új.

M3. Ha ragaszkodunk a feladat kiírásához, akkor a megoldás:

$$\rho(\vartheta) = a \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\operatorname{tg}^2 \phi}} + \sqrt{\left(1 + 2 \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\operatorname{tg}^2 \phi}\right)^2 - 1} . \quad (13)$$

Azonban nem megkerülhető a kérdés, hogy mihez tartozik a „ - ” előjel, így aztán nem nagy baj – szerintünk – , ha a (11) által leírt kettős függvényt tekintjük a tágabb értelemben vett megoldásnak. Ha ez nem elég, akkor módosíthatjuk a feladat kiírását, pl. így: Írjuk fel azon síkbeli pontok mértani helyének polárkoordinátás egyenletét, melyből egy 2^*a hosszúságú szakasz ϕ , illetve $180^\circ - \phi$ szög alatt látszik!

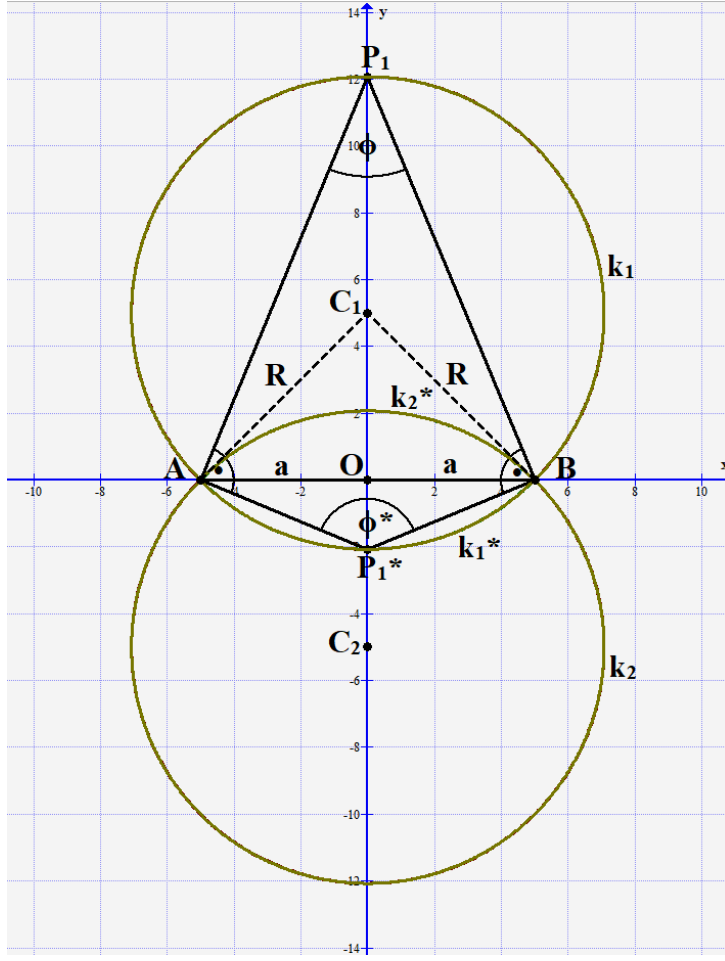
E módosított feladat pontos megoldását a (11) egyenlet írja le.

Szokás hozzáfűzni, hogy a mértani helyhez a szakasz végpontjai nem tartoznak hozzá. Továbbá azt is, hogy a látószög kisebb az egyenesszögnél.

M4. A látókör - problémakör egy nagyon fontos része az elemi geometriának. Sok feladat megoldását könnyíti meg, teszi egyszerűbbé. Erre láthattunk példát a legutóbbi **) írásunkban is.

M5. Hátravan még a körök sugarának és középpontjaik koordinátáinak meghatározása.

Ehhez tekintsük a 3. ábrát!



3. ábra

Ez alapján írhatjuk, hogy:

$$\overline{OC_1} + \overline{C_1P_1} = \overline{OP_1}, \quad \overline{OC_1} = y_{C_1}, \quad \overline{C_1P_1} = R, \quad \overline{OP_1} = \rho(90^\circ) \rightarrow y_{C_1} + R = \rho(90^\circ) \rightarrow \underline{y_{C_1} = \rho(90^\circ) - R}. \quad (14)$$

Továbbá Pitagorász tételével:

$$\underline{y_{C_1} = \sqrt{R^2 - a^2}}. \quad (15)$$

Most (14) és (15) - tel:

$$\rho(90^\circ) - R = \sqrt{R^2 - a^2}. \quad (16)$$

Négyzetre emelve és rendezve:

$$\rho^2(90^\circ) - 2 \cdot \rho(90^\circ) \cdot R + R^2 = R^2 - a^2 \rightarrow \rho^2(90^\circ) - 2 \cdot \rho(90^\circ) \cdot R = -a^2 \rightarrow \rho^2(90^\circ) + a^2 = 2 \cdot \rho(90^\circ) \cdot R \rightarrow R = \frac{\rho^2(90^\circ) + a^2}{2 \cdot \rho(90^\circ)} = \frac{1}{2} \cdot \left[\rho(90^\circ) + \frac{a^2}{\rho(90^\circ)} \right], \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{R = \frac{1}{2} \cdot \left[\rho(90^\circ) + \frac{a^2}{\rho(90^\circ)} \right]}} . \quad (17)$$

Majd (14) és (17) szerint:

$$y_{C_1} = \rho(90^\circ) - \frac{1}{2} \cdot \left[\rho(90^\circ) + \frac{a^2}{\rho(90^\circ)} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\rho(90^\circ) - \frac{a^2}{\rho(90^\circ)} \right] , \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{y_{C_1} = \frac{1}{2} \cdot \left[\rho(90^\circ) - \frac{a^2}{\rho(90^\circ)} \right]}} . \quad (18)$$

A körök középpontjainak koordinátái:

$$C_1(0 ; y_{C_1}) , C_2(0 ; -y_{C_1}) . \quad (19)$$

Ezután (13) - ba $\vartheta = 90^\circ$ - ot helyettesítve:

$$\underline{\underline{\rho(90^\circ) = a \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \phi} + \sqrt{\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \phi}\right)^2 - 1}}}} . \quad (20)$$

A 3. ábra példájához, (20) és (A) - val is:

$$\begin{aligned} \rho(90^\circ) &= 5 \text{ (cm)} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 45^\circ} + \sqrt{\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 45^\circ}\right)^2 - 1}} = \\ &= 5 \text{ (cm)} \cdot \sqrt{1 + 2 + \sqrt{(1 + 2)^2 - 1}} = 5 \text{ (cm)} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{9 - 1}} = \\ &= 5 \text{ (cm)} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{8}} = 5 \text{ (cm)} \cdot \sqrt{3 + 2 \cdot \sqrt{2}} , \text{ azaz:} \\ \underline{\underline{\rho(90^\circ) &= 5 \cdot \sqrt{3 + 2 \cdot \sqrt{2}} \text{ (cm)} = 12,07106781 \text{ (cm)} .}} \end{aligned} \quad (a)$$

Most (17), (A) és (a) - val:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \cdot \left[\rho(90^\circ) + \frac{a^2}{\rho(90^\circ)} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[12,07106781 + \frac{5^2}{12,07106781} \right] \text{ (cm)} , \\ \underline{\underline{R &= 7,07106781 \text{ (cm)} .}} \end{aligned} \quad (b)$$

Majd (18), (A) és (a) - val:

$$\begin{aligned} y_{C_1} &= \frac{1}{2} \cdot \left[\rho(90^\circ) - \frac{a^2}{\rho(90^\circ)} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[12,07106781 - \frac{5^2}{12,07106781} \right] \text{ (cm)} , \\ \underline{\underline{y_{C_1} &= 5 \text{ (cm)} .}} \end{aligned} \quad (c)$$

A látókörök paraméteres egyenletrendszerei:

$$x_1(t) = R \cdot \cos t, \quad y_1(t) = y_{C_1} + R \cdot \sin t, \quad (21 / 1)$$

$$x_2(t) = R \cdot \cos t, \quad y_2(t) = -y_{C_1} + R \cdot \sin t. \quad (21 / 2)$$

A t paraméter szóba jöhető értéktartományai:

$$-t_1 \leq t(k_1) \leq 180^\circ + t_1, \quad t_1 = \arcsin\left(\frac{y_{C_1}}{R}\right); \quad (22 / 1)$$

$$180^\circ - t_1 \leq t(k_2) \leq 360 + t_1. \quad (22 / 2)$$

A példabeli körökre vonatkozó összefüggések az alábbiak.

$$x_1(t) = 7,07106781 \text{ (cm)} \cdot \cos t, \quad (k1 / 1)$$

$$y_1(t) = 5 \text{ (cm)} + 7,07106781 \text{ (cm)} \cdot \sin t; \quad (k1 / 2)$$

$$t_1 = \arcsin\left(\frac{y_{C_1}}{R}\right) = \arcsin\left(\frac{5}{7,07106781}\right) = 45^\circ. \quad (t1)$$

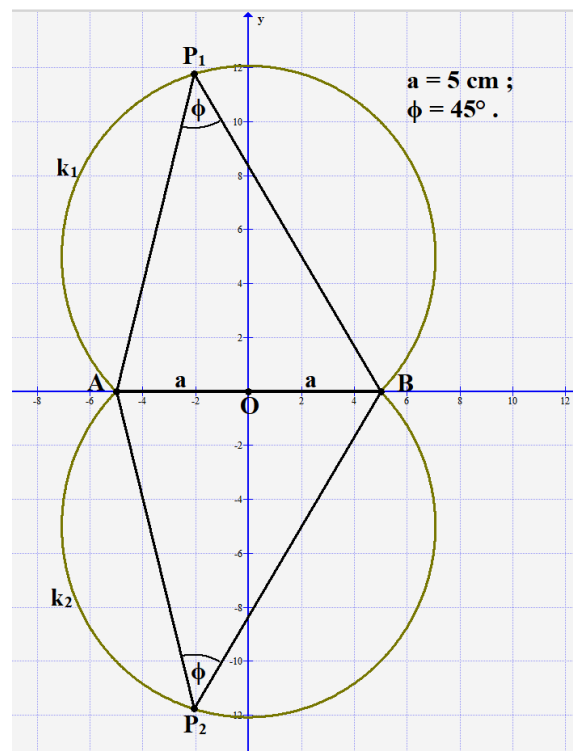
$$-45^\circ \leq t(k_1) \leq 225^\circ. \quad (tk1)$$

$$x_2(t) = 7,07106781 \text{ (cm)} \cdot \cos t, \quad (k2 / 1)$$

$$y_2(t) = -5 \text{ (cm)} + 7,07106781 \text{ (cm)} \cdot \sin t; \quad (k2 / 2)$$

$$135^\circ \leq t(k_2) \leq 405^\circ. \quad (tk2)$$

A példa eredményeit a 4. ábra mutatja.



4. ábra

M6. A fenti számításokkal nem túl gyakran találkozhatunk. Ezért is foglalkozunk ilyes - mivel, időnként visszatérve rájuk. Ezek a képletek nem annyira egyszerűek; pl.: azt sem könnyű megmondani, hogy (11) köröket ír le, csak a függvények ábrázolása után. Másképpen mondva: itt nem igazoltuk, csak szemléltettük, hogy a mértani helyek körívek. A látókör - tétel igazolására nézve ld. pl.: [1]!

M7. Sokak szemében még ma sem valami népszerű az, amit mi is csinálunk: a szintétikus geometriai eredményeket átültetni analitikus formába. A „hagyományos felfogás” legin - kább akkor kezdett némiképpen idejétmúlttá válni, amikor kellőképpen elterjedtek az asz - tali számítógépek, sok segédprogrammal felszerelve. Mi a **Graph** ingyenes rajzoló pro - gramot használjuk számítógépünkön, eléggé eredményesen. Ha megadjuk neki a mértani hely leírását jelentő $\rho = \rho(\vartheta)$ polárkoordinátás függvényt, akkor a rajzoló program meg - mutatja a hozzá tartozó görbé(ke)t. Erről úgy „derítjük ki”, hogy kör(ök)ről van szó, hogy meghatározzuk a feltételezett körök középpontjait és sugarát, majd ezekkel felírjuk a kör(ök) paraméteres egyenletrendszerét. Ezekkel is ábrázoljuk a görbéket. Ha a kétféle megadású függvények görbéi minden szóba jöhető pontban egybeesnek, akkor gyakorlati értelemben mondhatjuk, hogy feladatunkban a mértani helyek körívek. Itt lényegesnek tűnhet a „gyakorlati” jelző. Egy matematikusnak inkább, mint egy mérnöknek.

M8. Nem készítettünk mindenhová magyarázó ábrát. Ilyenek pl. a (22) képletek is. Javasoljuk, hogy az érdeklődő Olvasó készítse el ezeket magának!

Forrás:

[1] – **Hajós György**: Bevezetés a geometriába
6. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

Ajánlott olvasmányok:

*) [A latokor temajahoz.pdf \(galgoczi.net\)](http://galgoczi.net/A%20latokor%20temajahoz.pdf)

**) [Egy erdekes sikgeometria feladat 2.pdf \(galgoczi.net\)](http://galgoczi.net/Egy%20erdekes%20sikgeometria%20feladat.pdf)

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2024. 01. 24.

Továbbiak: www.galgoczi.net